Espaces vectoriels

Table des matières

1 Structure d'espace vectoriel

1.1 Structure sur un ensemble

On appelle structure sur un ensemble une série de lois de composition (addition, produit, etc...) et de propriétés vérifiées par ces lois. Il y a deux intérêts à structurer un ensemble :

- Dégager des propriétés obtenues à l'aide de cette structure.
- Généraliser ces propriétés à tout autre ensemble qui aura la même structure.

1.2 Définition

Définition 1.1 : *Espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$

Soit E un ensemble <u>non vide</u> muni d'une loi d'addition interne, notée $+$, et d'une loi de produit externe par un scalaire, notée $\cdot$.
On dit que $(E, +, \cdot)$ est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{R}$ si :

- Propriétés de la loi $+$:
  - Stabilité : $\forall (x, y) \in E^2, \quad x + y \in E$.
  - Commutativité : $\forall (x, y) \in E^2, \quad x + y = y + x$.
  - Associativité : $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$.
  - Élément neutre : $\exists 0_E \in E$ tel que $\forall x \in E$, $x + 0_E = 0_E + x = x$.
    Cet élément, appelé **élément nul** (ou vecteur nul), est forcément unique.
  - Élément symétrique : $\forall x \in E$, $\exists ! y \in E$ tel que $x + y = 0_E$.
    Cet élément, forcément unique, est noté $-x$.
- Propriétés de la loi $\cdot$:
  - Stabilité : $\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot x \in E$.
  - Associativité : $\forall x \in E$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\, \mu) \cdot x = \mu \cdot (\lambda \cdot x)$.
  - Élément neutre : $\forall x \in E$, $1 \cdot x = x$.
- Distributivité de la loi $\cdot$ sur la loi $+$:
  - $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.
  - $\forall x \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.

Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés **scalaires** et les éléments de E sont appelés **vecteurs**.

On peut également dire $\mathbb{R}$-espace vectoriel, espace vectoriel réel ou simplement espace vectoriel.

Propriété 1.2 : *Règles de calcul dans un espace vectoriel*

(i) $\forall x \in E$, $0 \cdot x = 0_E$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \quad \lambda \cdot x = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.

Démonstration. (i) Soit $x \in E$, on a

$$x + 0 \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x = x$$

De même, $0 \cdot x + x = x$. Ainsi, $0 \cdot x$ est un élément neutre pour la loi $+$ et donc, par unicité, $0 \cdot x = 0_E$.

(ii) Soit de plus $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda \neq 0$. On a

$$x = 1 \cdot x = \lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \cdot x\right) = \lambda \cdot \left(0_E + \frac{1}{\lambda} \cdot x\right) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \cdot x\right) = \lambda \cdot 0_E + 1 \cdot x = \lambda \cdot 0_E + x.$$

On en déduit donc que $\lambda \cdot 0_E$ est un élément neutre pour la loi $+$ et, comme précédemment, cela donne $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

(iii) On considère maintenant $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \cdot x = 0_E$. Si $\lambda \neq 0$, alors

$$x = 1 \cdot x = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E,$$

ce qui permet de conclure.

□

1.3 Espaces vectoriels de référence

On va donner un certain nombre d'exemples d'espaces vectoriels. Pour chacun de ces espaces vectoriels, on va détailler l'addition et le produit externe et donner l'élément nul.

L'ensemble $\mathbb{R}^n$

Un élément x de $\mathbb{R}^n$ s'écrit (on choisit de les écrire en colonnes ici, mais on peut également les écrire en lignes)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in \mathbb{R}$$

L'addition et le produit externe sont réalisés coordonnée par coordonnée :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{et } \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_3 \\ \vdots \\ \lambda\, x_n \end{pmatrix}.$$

L'élément nul de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur nul

$$0_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des vecteurs à n coordonnées dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices

Un élément A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ s'écrit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ ou plus explicitement

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!],\ a_{i,j} \in \mathbb{R}$$

L'addition et le produit externe sont réalisés coordonnée par coordonnée :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,p} + b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & a_{n,2} + b_{n,2} & \dots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a_{1,1} & \lambda\, a_{1,2} & \dots & \lambda\, a_{1,p} \\ \lambda\, a_{2,1} & \lambda\, a_{2,2} & \dots & \lambda\, a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\, a_{n,1} & \lambda\, a_{n,2} & \dots & \lambda\, a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

L'élément nul de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle

$$0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

L'ensemble $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ des applications

Soit $D \subset \mathbb{R}$, un élément f de $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} f : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

L'addition et le produit externe sont définis de la manière suivante :

$$\forall x \in D, (f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda \cdot f)(x) = \lambda\, f(x).$$

L'élément nul de $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ est l'application nulle f vérifiant

$$\forall x \in D,\ f(x) = 0.$$

L'ensemble $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ des applications de D dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'ensemble $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) des suites réelles

Un élément u de $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ s'écrit

$$u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

L'addition et le produit externe sont également ceux définis classiquement sur les fonctions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u+v)_n = u_n + v_n \text{ et } (\lambda \cdot u)_n = \lambda\, u_n.$$

L'élément nul de $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est la suite nulle u vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0.$$

L'ensemble $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes

Un élément P de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit avec $a_0, a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{R}$

$$P = a_0 + a_1\, X + \dots + a_n\, X^n = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i.$$

En prenant P et Q de degré inférieur ou égal à r, l'addition et le produit externe sont ceux définis classiquement sur les fonctions :

$$P + Q = \sum_{i=0}^{r} (a_i + b_i)\, X^i \text{ et } \lambda \cdot P = \sum_{i=0}^{r} \lambda a_i X^i, \quad \text{avec } P = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i \text{ et } Q = \sum_{i=0}^{r} b_i X^i.$$

L'élément nul de $\mathbb{R}[X]$ est le polynôme nul P vérifiant

$$P = 0.$$

L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

Remarque 1.3 : *Intérêt des espaces vectoriels*

On remarque donc que, selon le contexte, les éléments d'un espace vectoriel peuvent être des matrices, des n-uplets de $\mathbb{R}$, des polynômes, des fonctions, des suites... L'étude générale des espaces vectoriels permet de dégager des propriétés communes à tous ces ensembles structurés.

1.4 Combinaisons linéaires

Définition 1.4 : *Famille de vecteurs*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **famille de vecteurs** de E tout p-uplet $(f_1, \ldots, f_p)$ formé de p vecteurs de E.
On appelle **sous-famille** de $(f_1, \ldots, f_p)$ toute famille comprenant certains des vecteurs $f_1, \ldots, f_p$.
On appelle **sur-famille** de $(f_1, \ldots, f_p)$ toute famille comprenant au moins les vecteurs $f_1, \ldots, f_p$.

Définition 1.5 : *Combinaison linéaire*

Un vecteur x de E est dit **combinaison linéaire** de la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ s'il existe p éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \lambda_1 \cdot f_1 + \cdots + \lambda_p \cdot f_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot f_i$$

Pour montrer qu'un vecteur x de E est combinaison linéaire d'une famille $(f_1, \ldots, f_p)$, on résout l'équation vectorielle (amenant à un système linéaire) $x = \lambda_1 \cdot f_1 + \cdots + \lambda_p \cdot f_p$, d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Exemple 1. *Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$?*

Solution.

Exemple 2. *Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$?*

Solution.

Exemple 3. *Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^3 + 7$ est-il combinaison linéaire de la famille $\left((X+2)^3, (X+1)^2, 1\right)$?*

Solution.

1.5 Sous-espaces vectoriels

1.5.1 Définition

Définition 1.6 : *Sous-espace vectoriel*

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si :

(i) $F \subset E$

(ii) $F \neq \emptyset$

(iii) $\forall x, y \in F, \quad x + y \in F$. (stabilité par addition)

(iv) $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot x \in F$. (stabilité par multiplication externe)

Une partie non vide de E est donc un sous-espace vectoriel de E si elle stable par addition et par multiplication externe.

Propriété 1.7 : *Un sous-espace vectoriel contient le vecteur nul*

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, alors $0_E \in F$.

Démonstration. Il suffit de prendre $\lambda = 0$ dans la condition de stabilité par multiplication externe. $\square$

Remarque 1.8 : *Sous-espaces vectoriels triviaux*

Un espace vectoriel E a toujours au moins deux sous-espaces vectoriels qui sont E lui-même et $\{0_E\}$.

Théorème 1.9 : *Caractérisation d'un sous-espace vectoriel*

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. F est un **sous-espace vectoriel** de E si et seulement si :

(i) $F \subset E$

(ii) $0_E \in F$ (ou $F \neq \emptyset$)

(iii) $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$. (stabilité par combinaison linéaire)

On note que l'on peut remplacer la condition de stabilité par addition et par multiplication par un scalaire par la stabilité par combinaison linéaire.

La condition de stabilité par combinaison linéaire est souvent remplacée par

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot x + y \in F.$$

Démonstration. À démontrer en exercice. $\square$

Exemple 4. *Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. Soient $a \in \mathbb{R}$ et E_a l'ensemble des polynômes qui s'annulent en a. Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.*

Solution.

Exemple 5. *Soit $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites. Montrer que l'ensemble des suites convergentes $\mathcal{S}^c$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.*

Solution.

Exemple 6. *Montrer que l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Solution.

Propriété 1.10 : *Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel*

Soient $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.
L'ensemble F est lui-même un espace vectoriel pour les lois $+$ et $\cdot$.

La caractérisation d'un sous-espace vectoriel est beaucoup plus simple que celle d'un espace vectoriel. Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on utilisera cette propriété : on montrera que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

Démonstration. Il faut démontrer qu'un sous-espace vectoriel vérifie tous les points de la définition 1.1. $\square$

Propriété 1.11 : *Intersection de sous-espaces vectoriels*

Si $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

(i) Par définition de $F \cap G$, c'est un sous-ensemble de E.

(ii) F et G sont des sous-espaces vectoriels de E donc $0_E \in F$ et $0_E \in G$ ainsi $0_E \in F \cap G$.

(iii) Soient $x, y \in F \cap G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme F (resp. G) est stable par combinaison linéaire, si x et y appartiennent à F (resp. G) alors $\lambda x + \mu y \in F$ (resp. G). On a alors $\lambda x + \mu y \in F \cap G$.
$F \cap G$ est donc stable par combinaison linéaire.

Ainsi $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque 1.12 : *Union de sous-espaces vectoriels*

En général $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 7. *Si $E = \mathbb{R}^3$, alors $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a = b\}$ et $G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a = 2b\}$ sont deux sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$F \cap G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a = 0 \textit{ et } b = 0\} \textit{ est encore un sous-espace vectoriel de } E.$$

Cependant, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E car si

$$x = (1, 1, 0) \in F \textit{ et } y = (2, 1, 0) \in G \textit{ alors } x + y = (3, 2, 0) \notin F \cup G.$$

$F \cup G$ n'est pas stable par addition.

1.5.2 Exemples importants de sous-espaces vectoriels

Les ensembles $\mathbb{R}_n[X]$

Soit n un entier naturel. L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Attention, l'ensemble des polynômes de degré égal à n ne forme pas un espace vectoriel car il n'est pas stable pour l'addition.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. On pose A la matrice associée au système (S),

$$(S)\left\{\begin{array}{ccc} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,j}\,x_j + \cdots + a_{1,p}\,x_p & = & 0 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,j}\,x_j + \cdots + a_{2,p}\,x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,j}\,x_j + \cdots + a_{n,p}\,x_p & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

(i) Les solutions du système (S) sont dans $\mathbb{R}^p$.

(ii) Le vecteur nul est solution du système (S).

(iii) Soient X_1 et X_2 deux solutions de (S) et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a facilement que $\lambda X_1 + \mu X_2$ est solution de (S).
L'ensemble des solutions du système (S) est donc stable par combinaison linéaire.

Ainsi l'ensemble des solutions du système (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. □

2 Familles de vecteurs

2.1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Proposition 2.1 : *Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs*

Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E. L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(f_1, \dots, f_p)$ se note

$$\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p) = \left\{ \lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \cdots + \lambda_p \cdot f_p \text{ avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$$

$\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$ est un sous-espace vectoriel de E, dit **sous-espace vectoriel engendré par** $(f_1, \dots, f_p)$.

Démonstration. Nous avons

(i) Par définition de $\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$, c'est un sous-ensemble de E.

(ii) Comme $0_E = 0\, f_1 + 0\, f_2 + \cdots + 0\, f_p$, alors $0_E \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$.

(iii) Soient $u, v \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$, il existe donc $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq p}$ des réels tels que

$$u = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot f_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{i=1}^{p} b_i \cdot f_i.$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\lambda\, u + \mu\, v = \lambda \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot f_i + \mu \sum_{i=1}^{p} b_i \cdot f_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda a_i + \mu b_i) \cdot f_i.$$

Ainsi $\lambda u + \mu v \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$. $\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$ est donc stable par combinaison linéaire.

Par conséquent, $\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Exemple 8. *Quel est l'ensemble* $\mathrm{Vect}(1, X, X^2)$ *?*

Solution.

Méthode 2.2 : *Espace vectoriel engendré par une famille*

Une manière efficace de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel est de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

Exemple 9. *Montrer que* $F = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ *est un espace vectoriel.*

Solution.

Exemple 10. *Montrer que* $G = \left\{ \lambda_1\ (X^2 + 1) + \lambda_2\ (X^2 - 1) + \lambda_3 \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ *est un espace vectoriel.*

Solution.

2.2 Familles génératrices

Définition 2.3 : *Famille génératrice*

Une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ de vecteurs de E est dite **génératrice** si :

$$\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p) = E.$$

Cela revient à dire que tout vecteur de E est une combinaison linéaire de la famille $(f_1, \ldots, f_p)$, ou encore :

$$\forall x \in E, \quad \exists\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad x = \lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \cdots + \lambda_p \cdot f_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot f_i.$$

Exemple 11. *Déterminer une famille génératrice de* $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ vérifiant } 3x - y + 4z = 0 \right\}$.

Solution.

Exemple 12. *Pour $a \in \mathbb{R}$, on a vu dans l'exemple 4 que l'ensemble des polynômes s'annulant en a était un espace vectoriel. Soit G l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 s'annulant en 1,*

$$G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ avec } P(1) = 0\}$$

1. *Montrer que G est un espace vectoriel.*
2. *Déterminer une famille génératrice de G.*

Solution.

Proposition 2.4 : *Règles de calcul*

Soit $(f_1, \ldots, f_p, f_{p+1})$ une famille de vecteurs de E.

(i) $\mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p) \subset \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p, f_{p+1})$

(ii) Si f_{p+1} est une combinaison linéaire des p autres vecteurs, i.e. $f_{p+1} \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$

$$\mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p) = \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p, f_{p+1})$$

En particulier, $\mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p) = \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p, 0_E)$.

(iii) Si $\lambda \neq 0$, alors

$$\mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p) = \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, \lambda \cdot f_p)$$

(iv) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p) = \mathrm{Vect}\left(f_1, \ldots, \lambda \cdot f_p + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \cdot f_k\right)$$

(v) On peut également échanger deux vecteurs

$$\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_i, \ldots f_j \ldots, f_p) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_j, \ldots f_i \ldots, f_p)$$

Un espace vectoriel admettant une famille génératrice admet en fait une infinité de familles génératrices, certaines étant plus simples que d'autres. Cette proposition est utile pour trouver une famille génératrice plus simple.

Démonstration. À démontrer en exercice. □

Exemple 13. *Simplifier* $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix}\right)$ *en effectuant des opérations sur cette famille.*

Solution.

Exemple 14. *Simplifier* $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix}\right)$ *en observant qu'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres.*

Solution.

2.3 Familles libres

2.3.1 Définition

Définition 2.5 : *Famille libre, famille liée*

Une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ de vecteurs de E est dite **libre** si pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot f_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \forall i \in [\![1, p]\!], \quad \lambda_i = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Ceci revient à dire que la seule combinaison linéaire de 0_E d'une famille libre $(f_1, \ldots, f_p)$ est

$$0 \cdot f_1 + \cdots + 0 \cdot f_p$$

Exemple 15. *La famille* $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix}\right)$ *est-elle une famille libre de vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *?*

Solution.

Pour prouver qu'une famille est libre, on est souvent amené à résoudre un système linéaire.

Exemple 16. *La famille* $(X^3 - 1, X^2 + X + 1, X - 1)$ *est-elle une famille libre de polynômes de* $\mathbb{R}_3[X]$ *?*

Solution.

Propriété 2.6 : *Ecriture unique avec une famille libre*

Si une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre, alors toute combinaison linéaire de $(f_1, \ldots, f_p)$ est unique.

Démonstration. En effet, si $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot f_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \cdot f_i$, alors $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \mu_i) \cdot f_i = 0_E$.

D'après la définition d'une famille libre, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0$, et enfin $\lambda_i = \mu_i$. Les deux combinaisons linéaires sont donc identiques. $\square$

Propriété 2.7 : *Famille libre*

Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille libre de E et $f_{p+1} \in E$

$$(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}) \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad f_{p+1} \notin \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$$

On peut aussi écrire

$$(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}) \text{ est liée} \quad \Leftrightarrow \quad f_{p+1} \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 2.4. □

En particulier, toute famille contenant le vecteur nul est liée.

Exemple 17. *Montrer que* $\left(X^3 + X + 1, X^3 + X - 1, X^3 + X\right)$ *est une famille liée de* $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution.

Familles de polynômes

La proposition qui suit est souvent utilisée pour montrer la liberté d'une famille de polynômes.

Définition 2.8 : *Famille de polynômes échelonnée en degré*

On dit qu'une famille finie de polynômes non nuls est **échelonnée en degré** si elle est constituée de polynômes de degrés deux à deux distincts.

Proposition 2.9 : *Famille de polynômes échelonnée en degré*

Toute famille de polynômes échelonnée en degré est libre.

Démonstration. Soit $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes échelonnée en degré. Quitte à permuter les polynômes, on peut supposer que l'on a

$$0 \leq \deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n).$$

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Raisonnons par l'absurde : supposons que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$. Il existe donc un plus grand indice r tel que $\lambda_r \neq 0$. On a alors

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r = 0_{\mathbb{R}[X]} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{r-1} P_{r-1} = -\lambda_r P_r.$$

Or, le polynôme de gauche a pour degré $\max\limits_{i \in [\![1, r-1]\!]} \deg(\lambda_i P_i)$ et celui de droite $\deg(P_r)$ (car $\lambda_r \neq 0$). Par hypothèse sur le degré des polynômes considérés, on a

$$\max_{i \in [\![1, r-1]\!]} \deg(\lambda_i P_i) < \deg(P_r).$$

On aboutit donc à une contradiction. Ainsi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et donc la famille est libre.

□

2.3.2 Cardinal d'une famille libre

Propriété 2.10 : *Sous-famille libre, sur-famille liée*

Soit $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ une famille de E.

(i) Si $\mathcal{F}$ est libre, alors toute sous-famille de $\mathcal{F}$ est aussi libre.

(ii) Si $\mathcal{F}$ est liée, alors toute sur-famille de $\mathcal{F}$ est aussi liée.

Démonstration. (i) Soit $(g_1, \dots, g_r)$ une sous-famille de $(f_1, \dots, f_p)$. Quitte à changer l'ordre de la famille $(f_1, \dots, f_p)$, on peut supposer que $g_1 = f_1, \dots, g_r = f_r$. Soient $\lambda_1, \dots \lambda_r$ des réels tels que

$$\lambda_1 \cdot f_1 + \dots + \lambda_r \cdot f_r = 0_E.$$

En particulier,

$$\lambda_1 \cdot f_1 + \dots + \lambda_r \cdot f_r + 0 \cdot f_{r+1} + \dots + 0 \cdot f_p = 0_E.$$

Comme la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre alors tous les scalaires ci-dessus sont nuls et en particulier, $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. $(g_1, \dots, g_r)$ est bien une famille libre.

(ii) C'est la contraposée du (i).

□

Exemple 18. *La famille* $(X^3 - 1, X - 1)$ *est-elle une famille libre de polynômes de* $\mathbb{R}_3[X]$ *?*

Solution.

Propriété 2.11 : *Famille à un vecteur*

La famille (f_1) est libre $\Leftrightarrow f_1 \neq 0_E$.

Démonstration. À démontrer en exercice. □

Définition 2.12 : *Colinéarité*

Soient f_1 et f_2 deux vecteurs de E. On dit que f_1 et f_2 sont **colinéaires** si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } f_1 = \lambda \cdot f_2 \text{ ou } f_2 = \lambda \cdot f_1.$$

Propriété 2.13 : *Famille à deux vecteurs*

La famille (f_1, f_2) est libre $\Leftrightarrow$ f_1 et f_2 ne sont pas **colinéaires**.

Démonstration. À démontrer en exercice. □

Exemple 19. $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ *sont non colinéaires donc la famille* $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ *est libre.*

Exemple 20. $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ *sont colinéaires donc la famille* $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}\right)$ *est liée.*

Attention, l'argument de colinéarité de la propriété 2.13 n'est valable que pour <u>deux</u> vecteurs.

Exemple 21. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix}\right)$ *est une famille liée et pourtant les vecteurs sont* 2 *à* 2 *non colinéaires.*

2.4 Bases

Définition 2.14 : *Base d'un espace vectoriel*

Une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est une **base** d'un espace vectoriel E si elle est libre et génératrice de E. Autrement dit, pour tout $x \in E$, il existe un unique p-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot f_i.$$

Les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont appelés **coordonnées** de x dans la base $(f_1, \ldots, f_p)$.

On retiendra de cette définition que si une famille $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel E, alors

- comme $\mathcal{B}$ est génératrice de E, tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
- comme $\mathcal{B}$ est libre, cette combinaison linéaire est unique.

Proposition 2.15 : *Base de l'espace vectoriel engendré*

Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille de E.

$$(f_1, \ldots, f_p) \text{ est une base de } \operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_p) \quad \Leftrightarrow \quad (f_1, \ldots, f_p) \text{ est une famille libre.}$$

Démonstration. À démontrer en exercice. □

Nous reprenons les exemples de référence exposés au début du chapitre. Dans ces exemples, nous rencontrons des bases particulièrement simples que l'on appelle **bases canoniques**.

Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Définissons dans $\mathbb{R}^n$ la famille suivante

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$ et libre, c'est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Pour $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (coordonnées de x) tel que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Définissons dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ les matrices $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad E_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, \ldots, E_{n,p})$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et libre, c'est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Base canonique de $\mathbb{R}[X]$ (hors programme)

La famille de polynômes

$$(1, X, X^2, \dots, X^n, \dots)$$

est génératrice de $\mathbb{R}[X]$ par définition de $\mathbb{R}[X]$. Elle est aussi libre puisque tout polynôme s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de cette famille de vecteurs. Cette famille est appelée la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.

Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ constitue la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque 2.16 : *Ordre des vecteurs dans une base*

Il faut faire attention à l'ordre des vecteurs d'une base. Si l'on change l'ordre des vecteurs d'une base, on obtient encore une base, mais une base différente de la base de départ.

Exemple 22. *Déterminer les coordonnées de $P = 5X^3 + X + 3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.*

Solution.

Définition 2.17 : *Matrice colonne des coordonnées dans une base*

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $x \in E$. Il existe un unique p-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot f_i.$$

On appelle **matrice colonne des coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}).$$

Comme les coordonnées sur une base sont uniques, chaque vecteur a une unique matrice dans une base et à chaque matrice correspond un unique vecteur dans une base.

Exemple 23. *Déterminer la matrice de $P = 5X^3 + X + 3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.*

Solution.

Exemple 24. *Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de x dans la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.*

Solution.